2017-2018 ÖĞRETİM YILI ANALİZ 4 DERSİ
ARASINAV SORULARIN ÇÖZÜMÜ

1) $y=-x$ doğrusu üzerindeki $(x,-x)$ noktalarında $f(x,y)$ fonksiyonu tanımsızdır, çünkü her $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ için

$$f(x,-x)=\frac{x(-x)^3}{x^3+(-x)^3}=\frac{-x^4}{0}$$

dır. Yine $(0,0)$ noktasının her ε-civarı $(\varepsilon/2,-\varepsilon/2)$ gibi en az bir noktayı içerdiğinden, bu ε-civarda $f(x,y)$ tanımsızdır.

Sonuç olarak $f(x,y)$ fonk.u $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq -x\}$ üzerinde süreklidir, $\mathbb{R}^2$ üzerinde süreksizdir.

2) $(x,y)\neq(0,0)$ olmak üzere

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln((x+h)^2+y^2)-\ln(x^2+y^2)}{h}$$

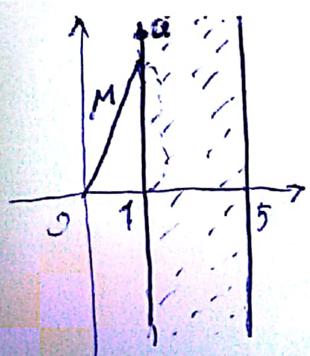
$$\underset{\substack{(L'Hopital\\ h\ için)}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(x+h)}{(x+h)^2+y^2}-0}{1}=\frac{2x}{x^2+y^2},$$

$$f_y(x,y)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\ln(x^2+(y+k)^2)-\ln(x^2+y^2)}{k}$$

$$\underset{\substack{(k\ için\ L'Hopital)}}{=}\lim_{k\to 0}\frac{\frac{2(y+k)}{x^2+(y+k)^2}}{1}=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

3) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 5\}\subset\mathbb{R}$ alt kümesi sınırsızdır, çünkü her $M>1$ için $a=(1,\sqrt{M^2-1}+1)\in A$, ama

$\|(1,\sqrt{M^2-1}+1)\|=\sqrt{1^2+(\sqrt{M^2-1}+1)^2}=\sqrt{M^2+2\sqrt{M^2-1}+1}>M$ dir.



A sınırsız olduğu için kompakt değil.

Yine herh. bir $(x,y),(a,b)\in A$ için

$t(x,y)+(1-t)(a,b)=(tx+(1-t)a,\ ty+(1-t)b)\in A$

olur, çünkü $1\leq x\leq 5$ ve $1\leq a\leq 5$ old. dan

$1\leq tx+(1-t)a\leq 5$ olur.

O halde A eğrisel bağlantılı, dolayısıyla bağlantılıdır.

$B=\{(x,y)\in \mathbb{Q}^2 : 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ kümesi kapalı değildir, çünkü her $n\in\mathbb{N}$ için

$$x_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\in\mathbb{Q}\ \wedge\ x_n\in[0,1]$$

olup, $x_n=y_n$ alınırsa

$$(x_n,y_n)\in B$$

olur ve $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=\left(\frac{e}{3},\frac{e}{3}\right)\notin B$ çıkar, böylece $\left(\frac{e}{3},\frac{e}{3}\right)\in B'$ olduğundan B kapalı değildir.

Sonuçta B kompakt değildir.

B kümesi bağlantılı değildir, çünkü $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<\frac{\sqrt{2}}{2}\}$, $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ kümeleri $\mathbb{R}^2$de açık kümeler olup, $B\cap U\neq\emptyset$, $B\cap V\neq\emptyset$, $U\cap B=\emptyset$ ve $B\subset U\cup V$ dir (burada $\sqrt{2}/2\notin\mathbb{Q}$ olduğuna dikkat ediniz).

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y=b \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \ni 0<\|(x,y)-(a,b)\|<\delta$ ise $|y-b|<\varepsilon$.

$0<\|(x,y)-(a,b)\|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |y-b|<\delta=\varepsilon.$

5) $\dfrac{\partial f}{\partial r}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r}=(2xy)(\cos\theta)+(x^2+2y)\sin\theta$

$=(r^2\cos^2\theta+2r\sin\theta)\sin\theta$ ... $=2r^2\cos^2\theta\sin\theta+(r^2\cos^2\theta+2r\sin\theta)\sin\theta$

$=2r^2\cos^2\theta\sin\theta+2r\sin^2\theta$

$=3r^2\cos^2\theta\sin\theta$

$\dfrac{\partial f}{\partial\theta}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\theta}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\theta}=(2xy)(-r\sin\theta)+(x^2+2y)(r\cos\theta)$

$=-2r^3\sin^2\theta\cos\theta+r^3\cos^3\theta+2r^2\cos\theta\sin\theta.$

6) $\Theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Theta(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Yani Θ sıfır fonk. onu

$$f(x,y) - f(0,0) = Df(0,0)((x,y)-(0,0)) + \varphi(x,y)$$
$$= \Theta(x,y) + (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

yazılışında $\Theta \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ve

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})}{(1/\sqrt{x^2+y^2})} \right)$$
$$= 0 \cdot 0 = 0.$$

O halde f, $(0,0)$ da dif. bilir.

Eğer $(a,b) \neq (0,0)$ ise $\varphi(x,y) = f(x,y) - f(a,b)$ alınırsa, yine istenene ulaşılır, yani f, (a,b) de diferansiyellenebilir olur.

7) $$J_{g(p)}(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix}\Bigg|_{g(p)} = \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ 1 & -1 \\ y & x \end{bmatrix}\Bigg|_{g(p)} = \begin{bmatrix} \cos(a+b) & 0 \\ 1 & -1 \\ ab & a+b \end{bmatrix}$$

$(g(P) = (a+b, a\cdot b)$ olduğunu kullandık.

$$J_p(g) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix}\Bigg|_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix}\Bigg|_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ab & a+b \end{bmatrix}.$$

$$J_p(f\circ g) = J_{g(p)}(f) \cdot J_p(g) = \begin{bmatrix} \cos(a+b) & 0 \\ 1 & -1 \\ ab & a+b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a\cdot b & a+b \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(a+b) & \cos(a,b) \\ 1-ab & 1-a-b \\ ab+(a+b)ab & ab+(a+b)^2 \end{bmatrix}.$$

8) $L(x,y) = Df\left(2,\frac{\pi}{6}\right)\left((x,y)-\left(2,\frac{\pi}{6}\right)\right) + f\left(2,\frac{\pi}{6}\right).$

$f(2,\pi/6) = \frac{e^4}{2}$ ve

$Df\left(2,\frac{\pi}{6}\right)\left(\left(x-2, y-\frac{\pi}{6}\right)\right) = J_{(2,\pi/6)}(f) \cdot \begin{bmatrix} x-2 \\ y-\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$

$= \left[f_x(2,\pi/6) \quad f_y(2,\pi/6) \right] \cdot \begin{bmatrix} x-2 \\ y-\pi/6 \end{bmatrix}$

$f_x(x,y) = 2e^{2x}\sin y$, $f_y(x,y) = e^{2x}\cos y$.

$f_x(2,\pi/6) = e^4$, $f_y(2,\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^4$.

$Df\left(2,\frac{\pi}{6}\right)\left((x,y)-(2,\pi/6)\right) = \left[e^4 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}e^4\right] \begin{bmatrix} x-2 \\ y-\pi/6 \end{bmatrix}$

$= e^4(x-2) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^4(y-\pi/6).$

Sonuç olarak

$L(x,y) = \frac{e^4}{2} + e^4(x-2) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^4(y-\pi/6).$